دانشگاه سمنان

به نام خدا

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲

زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

نوع امتحان: جزوه بسته

نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

۹۹-۴۰۰

---

۱. مشتق سوئی (جهتی) تابع $f(x,y,z)=3x^2yz+2yz^2$ را در جهت گرادیان رویه $x^2-y^2-z^2+1=0$ در نقطه $(1,1,1)$ بدست آوردید. (۲۰ نمره)

---

۲. کوتاهترین فاصله $z^2-xy=1$ تا مبدا را بیابید. (۲۰ نمره)

---

۳. مطلوب است $\int_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ که در آن c قوسی از دایره $x^2+y^2=4$ از $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ تا $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ می باشد. (۲۰ نمره)

---

۴. مساحت محدود به منحنی های $y=x^2$ ، $y=2x^2$ ، $x=y^2$ و $x=3y^2$ را بیابید. (۲۵ نمره)

---

۵. انتگرال زیر را درون ناحیه E که محدود به مخروط $z^2=x^2+y^2$ و صفحات $z=1$ و $z=2$ می باشد، محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

$z^2=x^2+y^2$

$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

$$\iiint_E \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

---

۶. شار برونسوی میدان $F(x,y,z)=y\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ گذرنده از سطح s به معادله $z=4-x^2-y^2$ واقع در بالای صفحه $z=0$ را محاسبه کنید. (۲۵ نمره)

مدرسین: آقایان اکرم-اکرمی-بیدخام- معمارباشی-نبوی و خانم شیبانی

پاسخ سوالات پایان ترم ریاضی ۲ ۹۹-۴۰۰

۱- $\nabla f=(6xyz\,,\,3x^2z+2z^2\,,\,3x^2y+4yz)$, $\nabla g=(2x\,,\,-2y\,,\,-2z)$

$\nabla g(1,1,1)=(2,-2,-2)$, $\dfrac{\nabla g}{|\nabla g|}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{12}}\,,\,\dfrac{-2}{\sqrt{12}}\,,\,\dfrac{-2}{\sqrt{12}}\right)$

$D_{\vec u} f(1,1,1)=\vec{\nabla f}\cdot\dfrac{\vec{\nabla g}}{|\vec{\nabla g}|}=(6,5,7)\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{12}}\,,\,\dfrac{-2}{\sqrt{12}}\,,\,\dfrac{-2}{\sqrt{12}}\right)=\dfrac{12-10-14}{\sqrt{12}}$

۲- $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \qquad g(x,y,z)=z^2-xy-1$

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-\lambda y=0 & (1)\\ 2y-\lambda x=0 & (2)\\ 2z-2\lambda z=0 & (3)\\ z^2-xy-1=0 & (4)\end{cases}\Rightarrow \text{if } x\neq 0,\ y\neq 0\quad \frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}\Rightarrow$$

$2x^2=2y^2\Rightarrow x=\pm y$ *

در رابطه (۳) داریم $\Leftarrow 2z(1-\lambda)=0$

اگر $z=0 \Leftarrow$ طبق رابطه ۴ در رابطه $y=-x$ داریم $-xy-1=0 \Rightarrow x^2-1=0$

$\Leftarrow x=\pm 1$, $y=\mp 1 \Rightarrow (1,-1,0)$, $(-1,1,0)$

اگر $z\neq 0 \Leftarrow$ طبق رابطه ۳ $\lambda=1 \xrightarrow{1,2} 2x=y\,,\,2y=x \Rightarrow x=0\,,\,y=0$

$\xrightarrow{(4)} z^2-1=0 \Rightarrow z=\pm 1$

پس نقاط $(1,-1,0)$ ، $(-1,1,0)$ و $(0,0,1)$ ، $(0,0,-1)$ را داریم

$f(1,-1,0)=2 \qquad f(0,0,-1)=f(0,0,1)=1$

$f(-1,1,0)=2$

پس نقطه مورد نظر $\boxed{(0,0,1)\,,\,(0,0,-1)}$ است.

۳- $$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial M}{\partial y}$

$\longrightarrow$ میدان کامل $\Rightarrow \exists f \quad \nabla f=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,,\,\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

$f(x,y)=\displaystyle\int\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx=-\frac{y}{y}\tan^{-1}\frac{x}{y}+g(y)=-\tan^{-1}\frac{x}{y}+g(y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}+g'(y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+g'(y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}\longrightarrow g(y)=C$

$\int \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) - f(\sqrt{2},\sqrt{2})$ طبق قضیه استقلال از مسیر

$= -\tan^{-1}\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

۴- $A = \iint_D dA \quad , \quad \begin{cases} \frac{y}{x^2} = u \Rightarrow & 1 \le u \le 2 \\ \frac{x}{y^2} = v & 1 \le v \le 3 \end{cases}$

$J' = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{4}{x^2y^2} - \frac{1}{x^2y^2} = \frac{3}{x^2y^2}$

$J = \frac{1}{J'} = \frac{x^2y^2}{3} \qquad \frac{xy}{x^2y^2} = uv \Rightarrow \frac{1}{xy} = uv \Rightarrow xy = \frac{1}{uv}$

$A = \int_1^2\int_1^3 \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u^2v^2}\,dv\,du \ldots$

۵. $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{\cancel{\,}}^{\cancel{\,}} \frac{r\,dz\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}}$

یا با تغییر متغیر کروی داریم

$I = \int_?^{2\pi}\int_?^?\int_?^? \frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2}}\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

$z=1 \Rightarrow \rho\cos\varphi = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\varphi} \quad , \quad z=2 \Rightarrow \rho\cos\varphi = 2 \Rightarrow \rho = \frac{2}{\cos\varphi}$

$z^2 = x^2+y^2 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi = \rho^2\sin^2\varphi \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi/4$

$0 \le \theta \le 2\pi \qquad I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi}} \rho\,d\rho\,d\varphi$

۶- طبق قضیه دیورژانس داریم:

G نقاط داخلی سطح S می‌باشد.

$$I=\iint_S F\cdot n\, d\sigma=\iiint_G \operatorname{div}F\, dx\,dy\,dz$$

$$\operatorname{div}F=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}=1$$

$$I=\iiint_G dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{4-r^2} dz=z\Big|_0^{4-r^2}=4-r^2$$

$$\int_0^2 r(4-r^2)\,dr=2r^2-\frac{r^4}{4}\Big|_0^2=8-4=4$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta=\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi$$

$$I=4\times 2\pi=8\pi$$

۷

۱-